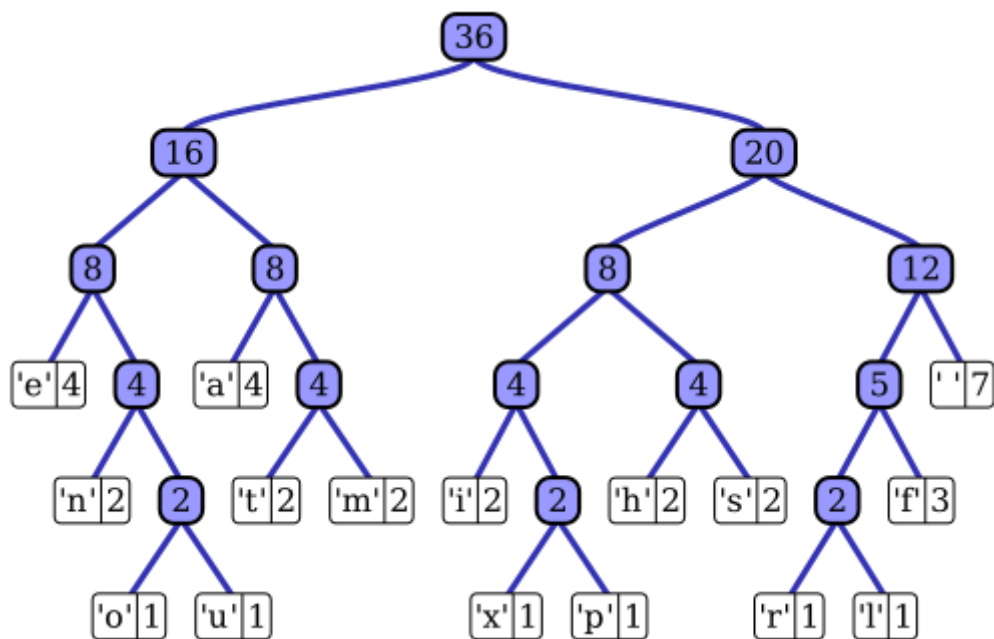




Étude du codage Huffman

Cours écrit par jaudi



Sommaire du cours

Sommaire du cours	2
Introduction	3
I – Biographie de David Albert Huffman	3
II – Présentation du codage Huffman	4
III – Codage de Huffman à dictionnaire statique	5
III.1 – Présentation du codage statique	5
III.2 – Exemple avec le codage statique	5
IV – Codage de Huffman à dictionnaire semi-adaptatif	6
IV.1 – Présentation du codage semi-adaptatif	6
IV.2 – Exemple : construction d'un dictionnaire complexe	6
IV.3 – De nombreux dictionnaires équivalents	8
IV.4 – Présentation du codage canonique	9
IV.5 – Exemple de codage canonique	9
V – Codage de Huffman à dictionnaire adaptatif	11
V.1 – Présentation du codage adaptatif	11
V.2 – Algorithme FGK	11
V.3 – Propriétés et exemples de codage FGK.....	12
V.4 – Algorithme Vitter	13
V.5 – Propriétés et exemples de codage Vitter	13
V.6 – Comparaison des codages adaptatifs FGK et Vitter	14
VI – Propriétés mathématiques du codage Huffman	16
VII – Analyse de l'outil du site Dcode	18
VII.1 – Fonctionnement de l'outil	18
VII.2 – Premier exemple : entrée ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ.....	18
VII.3 – Deuxième exemple : entrée AABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ.....	19
VII.4 – Troisième exemple : entrée AAAAAAAAAAABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ.....	19
VII.5 – Quatrième exemple : entrée EASINTRLUODCMPVGFQHBXJYZKW	20
Bibliographie et remerciements	21

Introduction

Chers membres de Club Alkindi,

Après avoir publié ou créé moi-même de nombreuses énigmes pour le site, j'ai décidé d'écrire mon premier cours sur Club Alkindi pour vous dévoiler les rouages d'un chiffrement qui m'a beaucoup intéressé.

Dans ce cours, nous allons nous plonger dans les coulisses d'un chiffrement plutôt récent que vous ne connaissez pas forcément tous, mais qui néanmoins a eu une importance capitale dans les télécommunications, notamment dans le secteur informatique, durant ce dernier siècle : le codage de Huffman.

Je pense que la majeure partie de ce cours peut être accessible à un niveau collégien et lycéen, car j'ai essayé de bien expliciter les différents procédés utilisés. Néanmoins, je pense que des adultes ou cryptanalystes plus chevronnés y trouveront également leur compte car j'ai essayé d'être exhaustif sur les méthodes, la théorie mathématique, les heuristiques informatiques ainsi que les exemples pour vous fournir un document approfondi sur le sujet. Ce cours pourra vous être utile pour certaines énigmes du site, déjà parues ou qui arriveront prochainement donc profitez-en !

Bonne lecture,

jaudi

I – Biographie de David Albert Huffman

Né le 9 août 1925 dans l'Ohio, David Albert Huffman obtint un baccalauréat en génie électrique en 1944, puis fut embauché deux ans dans la Marine américaine en tant qu'officier de maintenance des radars. En 1949, il fut diplômé d'un master en génie électrique à Ohio.

Durant sa thèse au MIT, il publia un article intitulé « *A Method for the Construction of Minimum-Redundancy Codes* », qui apparaît en page 1098 de la revue Proceedings of the Institute of Radio Engineers de septembre 1952. Cet article de 3 pages sur la construction de codes à redondance minimale, apparemment anodin et présentant une méthode optimale de codage pour minimiser le nombre moyen de chiffres du code d'un message, aura des conséquences immenses pour la cryptographie lors de l'essor de l'informatique. En effet, ce

codage Huffman permet la compression de données sans perte et a été utilisé durant des dizaines d'années par de nombreux domaines (réseaux informatiques, télévisions, premiers ordinateurs, télécopieurs...). Petite anecdote, cet article a été écrit alors que les étudiants du cours de Robert Fano (inventeur du codage Shannon-Fano) avaient le choix entre passer un

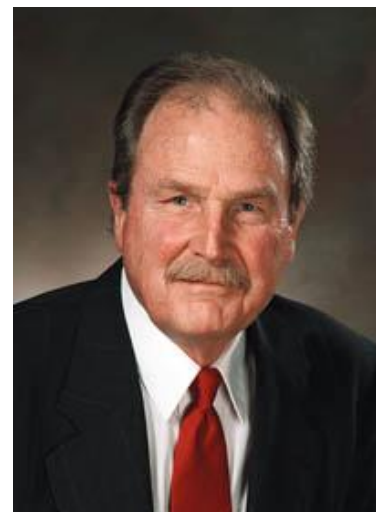


Figure 1 -Portrait de David Albert Huffman

examen final traditionnel ou améliorer un algorithme de pointe pour la compression de données, et Huffman opta alors pour la deuxième solution et proposa une méthode qui surpassa celle de son professeur, créant ainsi le codage de Huffman, que nous allons étudier dans ce cours !

Il soutint ensuite sa thèse, intitulée « *The Synthesis of Sequential Switching Circuits* », sur les circuits de commutation séquentielle sous la direction de Caldwell en 1953. Il rejoint ensuite la faculté du MIT en 1953, puis l'université de Californie Santa Cruz en 1967 pour élaborer les programmes académiques concernant l'informatique. A sa retraite en 1994, il continua d'enseigner en tant que professeur, notamment sur la théorie de l'information et l'analyse des signaux.

Durant toute sa carrière, ce chercheur américain réalisa de grands travaux de recherche en informatique (théorie de l'information, codage, circuits logiques...) et mathématiques (étude des surfaces avec zéro courbure) et reçut de nombreuses distinctions, notamment la médaille Richard-Hamming en 1999, attribuée par l'Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), l'année de son décès.

II – Présentation du codage Huffman

Inventé en 1952 par David Albert Huffman (comme évoqué dans sa biographie), le codage Huffman autorise une économie conséquente de 0 et de 1 en adaptant le chiffrement des lettres à leur fréquence (un peu à l'image du Morse).

Par conséquent, cet algorithme, qui prend en argument un alphabet quelconque, permet une compression des données sans perte, sous format binaire.

On définit un dictionnaire qui, à chaque caractère de l'alphabet, associe un code binaire unique (composé de 0 et de 1). De plus, le codage de Huffman est un code préfixe, ce qui signifie que le dictionnaire est construit de telle sorte qu'aucun des codes binaires d'un caractère de l'alphabet ne serve de préfixe (c'est-à-dire début de code) à un code binaire pour un autre caractère de l'alphabet.

L'intérêt de ce codage est de diminuer la taille moyenne des données transmises, ce qui veut dire qu'en moyenne, le code Huffman fait l'économie de nombreux caractères par rapport aux méthodes de transmission classiques. Par conséquent, la longueur des codes peut varier en fonction des caractères.

A l'image de l'alphabet Morse, l'intérêt de ce codage est d'attribuer des codes courts aux caractères fréquents (comme le E de la langue française) et des caractères plus longs aux caractères peu utilisés (comme le K de la langue française). Alors que le codage ASCII, classiquement utilisé, transmettait tous les caractères sur 8 bits (à savoir une suite de huit chiffres 0 ou 1), ce qui, pour un message de longueur n , implique de transmettre $8n$ caractères, le code Huffman, lorsqu'il est bien employé, transmet souvent un nombre bien moindre de caractères.

Il existe trois versions différentes de ce codage :

- Codage de Huffman statique
- Codage de Huffman semi-adaptatif
- Codage de Huffman adaptatif

III – Codage de Huffman à dictionnaire statique

III.1 – Présentation du codage statique

Pour le codage de Huffman à dictionnaire statique, chaque caractère (ou octet) a déjà un code prédéfini et connu par les personnes qui s'échangent les messages. Par conséquent, il n'y a pas nécessité de transmettre le dictionnaire à son interlocuteur à chaque échange de messages.

III.2 – Exemple avec le codage statique

Pour cet exemple, on considère l'alphabet gamma = « BACD » (utilisé dans des contrées lointaines). Alice et Bob ont convenu du dictionnaire de correspondances suivant : B=11, A=0, C=1000, D=10010.

Par conséquent, lorsque Bob envoie à Alice le message 1101000, Alice le déchiffre suivant la méthode suivante :

- Elle regarde le premier bit (1), et voit qu'aucun caractère n'a ce codage dans le dictionnaire.
- Elle y ajoute ensuite le deuxième bit (11), et voit que B possède le codage 11. Par conséquent, elle note que la première lettre du clair est un B, et peut ensuite chercher la lettre suivante. En effet, comme le codage Huffman est un code préfixe, elle est sûre qu'aucun autre caractère que B ne commence par le chiffré 11.
- Elle regarde ensuite le troisième bit (0), et voit que A possède le codage 0. Par conséquent, elle note que la deuxième lettre du clair est un A, et peut ensuite chercher la lettre suivante.
- Elle regarde ensuite le quatrième bit (1), et voit qu'aucun caractère n'a ce codage dans le dictionnaire.
- Elle y ajoute ensuite le cinquième bit (10), et voit qu'aucun caractère n'a ce codage dans le dictionnaire.
- Elle y ajoute ensuite le sixième bit (100), et voit qu'aucun caractère n'a ce codage dans le dictionnaire.
- Elle y ajoute ensuite le septième bit (1000), et voit que C possède le codage 1000. Par conséquent, elle note que la troisième lettre du clair est un C.
- Elle est arrivée à la fin du chiffré, et conclut donc que le message transmis est BAC.

IV – Codage de Huffman à dictionnaire semi-adaptatif

IV.1 – Présentation du codage semi-adaptatif

Pour le codage de Huffman à dictionnaire semi-adaptatif, l'algorithme prend en argument un alphabet et la fréquence de chacune des lettres de cet alphabet.

Elle construit l'arbre progressivement en fusionnant les deux nœuds les moins fréquents en un nouveau nœud intermédiaire dont la fréquence vaut la somme de ses deux feuilles. Une fois que tous les nœuds sont construits, les nœuds sont classés par longueur (correspondant aux nombres de branches les séparant du tronc) puis par ordre alphabétique.

Comme tout codage Huffman, le codage semi-adaptatif est un code préfixe, donc l'arbre est construit en veillant à ce qu'aucun des codes n'ait un début correspondant au code d'une lettre plus courte.

Contrairement au dictionnaire statique, le codage semi-adaptatif est considéré comme optimal en termes de compression, dans le sens où il permet de bien représenter un message sur un nombre de bits très proche du minimum théorique. Néanmoins, cette optimalité n'est valable qu'au regard de la liste des fréquences utilisées pour l'alphabet. Par exemple, en utilisant les fréquences françaises, le codage aura une compression quasiment optimale pour un texte français (long), mais pas forcément pour un message en anglais.

IV.2 – Exemple : construction d'un dictionnaire complexe

Pour cet exemple, on utilise le codage semi-adaptatif avec une convention brute, avec l'assemblage systématique des plus faibles fréquences. Elle est différente de la convention canonique expliquée ci-dessous, car elle ne comporte pas d'étape finale permettant la réattribution des codes suivant le classement dans la liste.

On réalise la fusion successive des différentes branches (ou nœuds) ayant la plus faible fréquence et, de manière systématique, on place à gauche (suffixe 0) la branche ayant la plus petite fréquence, et à droite (suffixe 1) celle ayant la plus grande fréquence. Par la suite, le code binaire attribué à une lettre s'obtient simplement en lisant les bits le long du chemin qui descend de la racine de l'arbre jusqu'à cette lettre.

On considère l'alphabet beta = « ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ_ », comprenant les 26 lettres et l'espace.

On utilise les fréquences françaises de cette alphabet, présentes dans le dictionnaire ci-dessous.

freq_fr = { "_": 17.4, "E": 14.33, "A": 6.77, "S": 6.55, "I": 6.22, "N": 5.92, "T": 5.77, "R": 5.49, "L": 4.89, "U": 4.73, "O": 4.57, "D": 3.31, "C": 2.75, "M": 2.45, "P": 2.41, "V": 1.15, "G": 0.90,

"F": 0.89, "Q": 0.86, "H": 0.77, "B": 0.76, "X": 0.39, "J": 0.28, "Y": 0.26, "Z": 0.08, "K": 0.05, "W": 0.02 }

On réalise ensuite la construction de l'arbre de Huffman, en fusionnant successivement les deux éléments avec la plus faible fréquence :

- Étape 1 : Fusion de W (0.02) et K (0.05) → Nœud (0.07)
- Étape 2 : Fusion de Z (0.08) et du Nœud (0.07) → Nœud (0.15)
- Et ainsi de suite jusqu'à constituer l'arbre entier (représenté ci-dessous en deux parties).

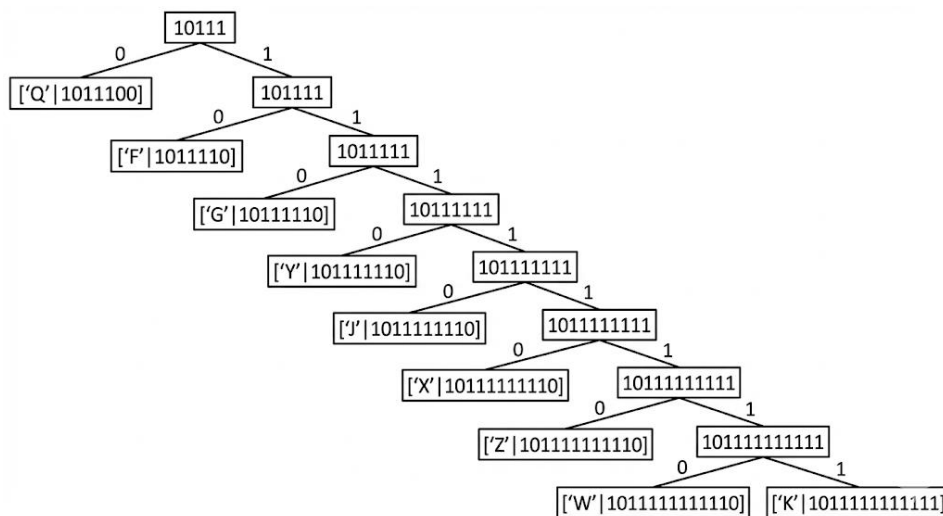


Figure 2 - Construction de l'arbre pour l'alphabet beta à 27 caractères - partie 2 (source : jaudi)

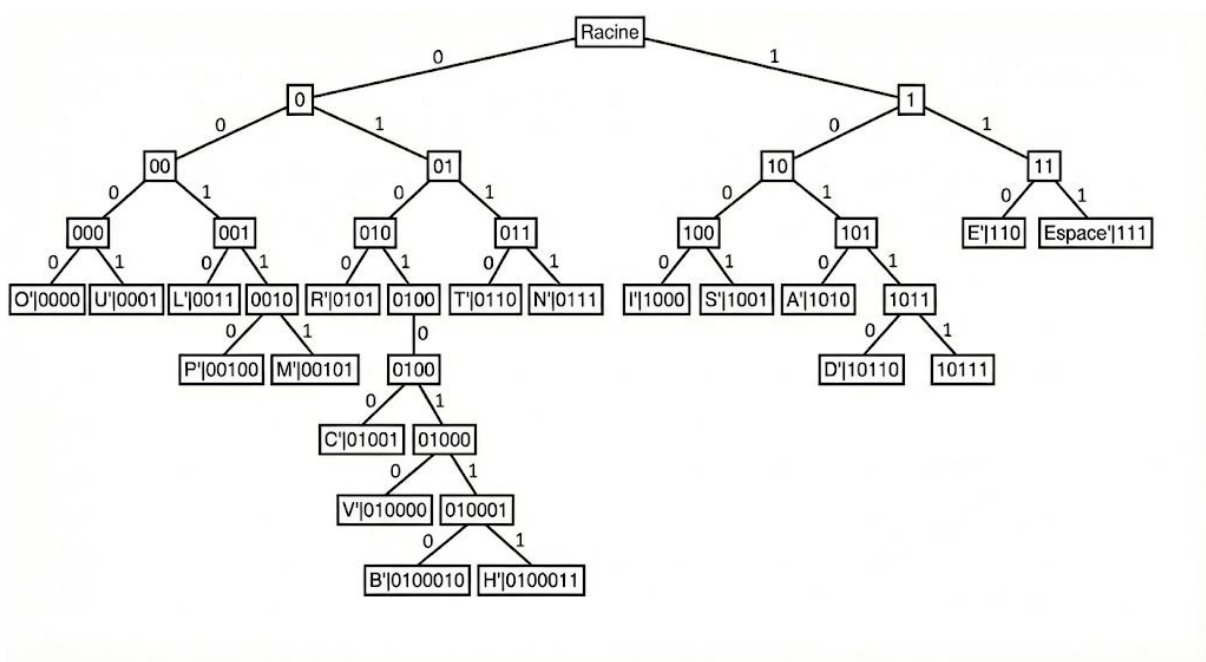


Figure 3 - Construction de l'arbre pour l'alphabet beta à 27 caractères (source : jaudi)

--- DICTIONNAIRE DE HUFFMAN OPTIMAL (FRANÇAIS) ---

'E': 110 (3 bits)
 'Espace': 111 (3 bits)
 'O': 0000 (4 bits)
 'U': 0001 (4 bits)
 'L': 0011 (4 bits)
 'R': 0101 (4 bits)
 'T': 0110 (4 bits)
 'N': 0111 (4 bits)
 'I': 1000 (4 bits)
 'S': 1001 (4 bits)
 'A': 1010 (4 bits)
 'P': 00100 (5 bits)
 'M': 00101 (5 bits)
 'C': 01001 (5 bits)
 'D': 10110 (5 bits)
 'V': 010000 (6 bits)
 'B': 0100010 (7 bits)
 'H': 0100011 (7 bits)
 'Q': 1011100 (7 bits)
 'F': 1011101 (7 bits)
 'G': 1011110 (7 bits)
 'Y': 101111101 (9 bits)
 'J': 101111110 (9 bits)
 'X': 101111111 (9 bits)
 'Z': 1011111001 (10 bits)
 'W': 10111110000 (11 bits)
 'K': 10111110001 (11 bits)

Comme il est possible d'inverser tous les 0 et les 1 pour tous les nœuds qui séparent deux branches qui ne mènent pas directement à deux feuilles (qui sont au nombre de 17, ce qui donne un facteur 2^{17}) et qu'il y a 2 caractères chiffrés par 3 bits, 9 par 4 bits, 4 par 5 bits, 1 par 6 bits, 5 par 7 bits, 0 par 8 bits, 3 par 9 bits, 1 par 10 bits ainsi que 2 par 11 bits, le nombre total de dictionnaires possibles vaut donc :

$$2! \times 9! \times 4! \times 1! \times 5! \times 0! \times 3! \times 1! \times 2! \times 2^{17} = 3,29 \times 10^{15}$$

Ainsi, cette correspondance trouvée n'est qu'une possibilité de dictionnaire optimal pour l'alphabet français avec espace parmi plus de 3 millions de milliards de variantes possibles, ce qui rend le brute-force d'un tel dictionnaire quasiment impossible sans une convention claire.

IV.3 – De nombreux dictionnaires équivalents

Comme on l'a observé dans l'exemple précédent, le dictionnaire dépend de l'ordre d'entrée

des lettres dans le texte qui a servi à le générer. Il existe donc de nombreux dictionnaires optimaux possibles, car, à chaque fusion de nœuds, on peut choisir d'inverser les codes des branches droites et des branches gauches. Par conséquent, il existe de nombreuses permutations d'un même codage de Huffman.

Ainsi, les utilisateurs du codage Huffman ont dû se mettre d'accord pour convenir d'une convention pour choisir arbitrairement une des permutations parmi ces nombreux dictionnaires équivalents, ce qui a donné lieu à la création du codage canonique.

IV.4 – Présentation du codage canonique

Le codage canonique est une convention utilisée pour avoir, à l'aide de règles, l'unicité d'un dictionnaire semi-adaptatif. Après avoir appliqué l'algorithme du codage semi-adaptatif avec une convention quelconque (comme la convention brute), il ajoute une étape de renumérotation binaire dépendant de la longueur des codes et de l'ordre alphabétique, pour avoir une variante universelle de construction du dictionnaire.

Sa construction est régie par les principes suivants :

- Par fusions successives, l'arbre du codage semi-adaptatif est construit comme décrit ci-dessus avec la convention brute. Les caractères sont ensuite triés par la longueur de leur code binaire, puis par ordre dans l'alphabet s'ils ont la même longueur.
- Le premier symbole reçoit un code de la même longueur que son code d'origine, mais composé uniquement de zéros (0).
- Chaque symbole suivant reçoit le nombre binaire immédiatement supérieur dans la séquence, garantissant que les codes suivants ont toujours une valeur plus élevée.
- Lorsqu'on atteint un code plus long, on effectue un décalage (équivalent à un décalage à gauche ou à une multiplication par 2^N avec N la différence de longueur) pour ajouter des zéros de remplissage afin d'atteindre la nouvelle longueur.

Cette convention, usuellement employée dans les algorithmes, n'est pas toujours celle utilisée sur des sites de cryptographie (notamment Dcode, dont la convention sera détaillée ultérieurement).

Avec cette convention canonique, on peut même envisager ne fournir que la longueur du codage utilisé en guise de dictionnaire.

IV.5 – Exemple de codage canonique

Pour cet exemple, on considère l'alphabet gamma = « BACD » (utilisée dans des contrées lointaines). Dans cette langue, la fréquence des lettres est B : 51 %, A = 15 %, D = 15 % et C = 19 %.

On construit le dictionnaire par la procédure suivante :

- On fusionne A et D pour former nœud_1 (30 %).
- On fusionne C et nœud_1 pour former nœud_2 (49 %).

- On fusionne B et nœud_2 pour former nœud_3 (100 %), qui correspond donc au tronc.

Arbre de Huffman pour l'Alphabet Gamma 'BACD' (Représentation Graphique)

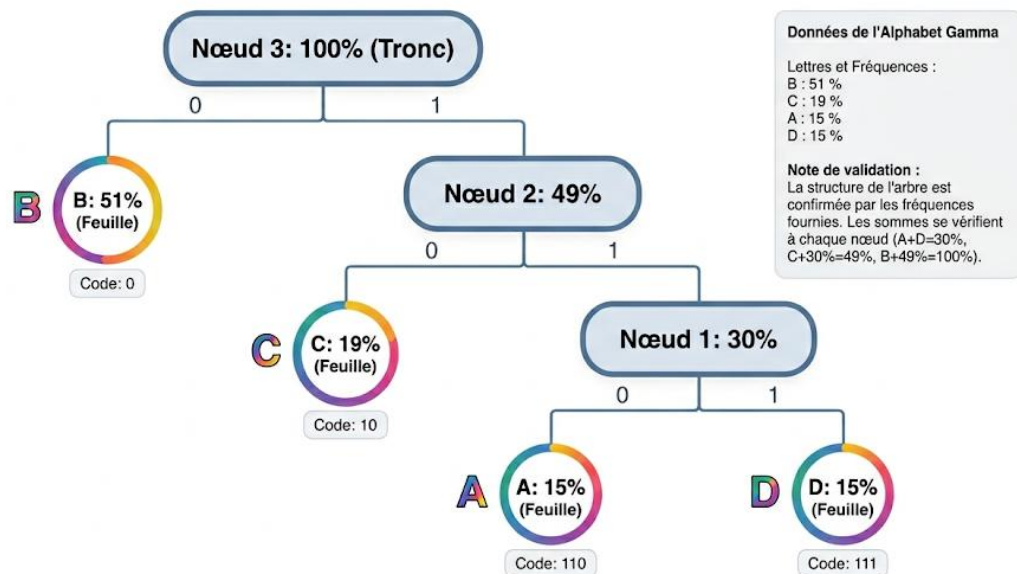


Figure 4 - Construction du dictionnaire canonique (source : jaudi)

Ainsi, les lettres présentes dans le dictionnaire sont donc B (codage de longueur 1 bit), C (2 bits), A (3 bits) et D (3 bits).

On attribue une fois 0 au premier code (car il est sur un bit) donc B=0, puis on prend le code suivant (1), on le décale de $2-1=1$ bit (car le caractère suivant est sur 2 bits) en ajoutant un zéro donc C=10. Ensuite, on prend le code suivant (11), on le décale de $3-2=1$ bit (car le caractère suivant est sur 3 bits) en ajoutant un zéro donc A=110. Enfin, D (qui est sur 3 bits), est représenté par le code suivant donc D=111.

On en déduit alors le dictionnaire utilisé : B=0, C=10, A=110 et D=111.

Par exemple, BAC sera chiffré 011010 (6 bits, ce qui montre que le codage semi-adaptatif est un gain énorme par rapport aux $3 \times 8 = 24$ bits habituellement nécessaire pour représenter ce code par ASCII).

Concernant l'alphabet beta = « ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ_ » avec les fréquences françaises freq_fr (comme dans l'exemple détaillé précédemment), le codage canonique s'obtient de manière similaire : on attribue trois fois 0 au premier code (car il est sur trois bits) donc E = 000, puis l'espace (également sur trois bits) obtient le code suivant donc espace = 001, et ainsi de suite...

V – Codage de Huffman à dictionnaire adaptatif

V.1 – Présentation du codage adaptatif

Pour le codage de Huffman à dictionnaire adaptatif, on n'a besoin d'aucune information sur le texte à transmettre, ni de l'alphabet, ni des fréquences des lettres. En effet, ce système permet de construire le code au fur et à mesure de la transmission des symboles, n'ayant aucune connaissance initiale de la distribution de la source, qui permet un codage et une adaptation à l'évolution des conditions dans les données.

Néanmoins, si une telle procédure présente l'avantage de pouvoir être codée en temps réel sans nécessité d'informations externes ni d'un partage de dictionnaire, elle présente l'inconvénient d'être ruinée si elle comporte ne serait-ce qu'une seule erreur de transmission. Par conséquent, elle implique de développer des procédures pour la détection et la correction d'éventuelles erreurs.

De plus, le codage adaptatif nécessite plus de puissance de calcul qu'un codage semi-adaptatif, mais en contrepartie, il permet souvent d'avoir un meilleur taux de compression.

Les principales implémentations de ce codage sont les algorithmes FGK et Vitter.

V.2 – Algorithme FGK

L'algorithme FGK doit son nom aux initiales de Newton Faller (1973), Robert Gray Gallager (1978) et Donald Knuth (1985), trois chercheurs ayant successivement contribué à son élaboration et à son perfectionnement.

Cet algorithme construit et met à jour l'arbre de compression au fur et à mesure de la compression des données. Pour les caractères qui n'ont pas encore été rencontrés, le système réserve les nœuds « Not Yet Transmitted » (NYT).

Si le caractère est déjà dans l'arbre, on renvoie son chemin binaire. Sinon, on envoie le chemin binaire menant au nœud NYT puis son code binaire brut. La version officielle implique qu'un nouveau symbole est codé par le code du NYT suivi des 8 bits ASCII du caractère mais rien n'empêche d'avoir des variantes avec des initialisations différentes (par exemple de procéder à l'ajout d'un bit pour chaque nouveau caractère, ce qui permet de garder la traçabilité de chaque nœud mais pas leur identité originale, qui peut ensuite être retrouvée par analyse fréquentielle). On augmente ensuite la fréquence de ce caractère de 1, puis on actualise l'arbre. Si l'arbre de Huffman ne respecte plus ses propriétés (notamment la propriété selon laquelle plus les nœuds sont proches de la racine, plus ils sont fréquents), on le recalcule, ce qui implique de changer des nœuds ou des branches entières pour restaurer l'équilibre.

V.3 – Propriétés et exemples de codage FGK

La variante classique du codage FGK consiste à ne procéder aux modifications de l'arbre que lorsque la fréquence d'un nœud (noté 1) devient strictement supérieure à celle d'autres nœuds de l'arbre possédant un codage binaire plus court que le nœud 1. Dans ce cas-là, par souci d'efficacité et de simplicité du codage, seuls deux nœuds vont être intervertis : le nœud 1 va prendre la place de celui qui, parmi les nœuds qui sont moins fréquents et dont le codage est plus court que le sien, possède le codage binaire le plus court.

En outre, pour cette variante, on initialisera systématiquement le NYT = 0 et on mettra toujours la lettre à gauche (ajouter le suffixe 0 au NYT), et le nouveau NYT à droite (ajouter le suffixe 1 au NYT).

Par conséquent, on observe bien qu'un tel codage va avoir un arbre qui s'allonge de plus en plus (avec des chiffres très longs pour les caractères les moins fréquents), ce qui ne correspond pas à un codage optimal en termes de compression, mais qui est néanmoins astucieux et assez intéressant en termes de compression et de transmission de données sans avoir la nécessité de donner un dictionnaire au destinataire du message.

Par exemple, pour chiffrer le message ABBCDBAAAA, on emploie les étapes suivantes :

- NYT = 0 au début
- A = 00, NYT = 01
- B = 010, NYT = 011
- B = 010, NYT = 011
- On se rend compte que $\text{freq}(B)=2 > \text{freq}(A)=1$. Par conséquent, B et A inversent leurs codages (par la suite B = 00 et A = 010)
- C = 0110, NYT = 0111
- D = 01110, NYT = 01111
- B = 00, NYT = 01111
- A = 010, NYT = 01111
- A = 010, NYT = 01111
- A = 010, NYT = 01111
- On se rend compte que $\text{freq}(A)=4 > \text{freq}(B)=3$. Par conséquent, A et B inversent leurs codages (par la suite A = 00 et B = 010).
- A = 00, NYT = 01111

Par conséquent, le message chiffré final sera 00/010/010/0110/01110/00/010/010/010/00 soit 000100100110011100001001001000.

Autre exemple, pour chiffrer CABAS_A, on emploie les étapes suivantes :

- NYT = 0 au début
- C = 00, NYT = 01
- A = 010, NYT = 011
- B = 0110, NYT = 0111
- A = 010, NYT = 0111

- On se rend compte que $\text{freq}(A)=2 > \text{freq}(C)=\text{freq}(B)=1$. Par conséquent, la lettre A va être intervertie avec celui qui possède le plus petit codage parmi B et C (il s'agit de C car son codage binaire est de longueur 2, contre 4 pour celui de B). Par conséquent, pour la suite $A = 00$ et $C = 010$.

- $S = 01110$, $\text{NYT} = 01111$

- $_ = 011110$, $\text{NYT} = 011111$

- $A = 00$, $\text{NYT} = 011111$

Par conséquent, le message chiffré final est donc : 0001001100100111001111000

V.4 – Algorithme Vitter

L'algorithme Vitter, créé par Jeffrey Vitter en 1987, est une amélioration de l'algorithme FGK qui est devenu une méthode de référence pour la compression adaptative. En effet, à force d'échanges basiques, l'arbre peut parfois devenir très « haut » et déséquilibré (car chaque nouveau caractère allonge l'arbre vers le bas, ce qui conduit l'algorithme à être sous-optimal), ce qui crée des chemins longs, et donc des codes binaires moins efficaces.

L'amélioration est donc de mettre une règle de tri beaucoup plus stricte, à savoir que, lorsqu'on est à poids égal, les branches (ensemble de plusieurs nœuds) sont toujours prioritaires sur les feuilles, afin de forcer l'arbre à rester le plus « large » et équilibré possible. Par conséquent, si une branche gagne en fréquence, elle glisse pour passer automatiquement devant tous les embranchements qui ont le même poids qu'elle (au lieu de simplement échanger sa place avec les branches situées au-dessus d'elle).

Grâce à cette règle de priorité stricte, l'arbre s'élargit au lieu de s'allonger et les codes générés seront toujours très proches de l'optimum absolu.

V.5 – Propriétés et exemples de codage Vitter

Une variante du codage Vitter consiste à initialiser l'arbre avec $\text{NYT} = \emptyset$ (seulement pour le premier caractère) et à utiliser, pour la première apparition de chacun des caractères, les codes ASCII représentés sur 8 bits, bien sûr précédés du NYT pour que ce codage reste un code préfixe. Par convention, on mettra toujours le nouveau NYT à gauche (ajouter le suffixe 0 au NYT), et la lettre à droite (ajouter le suffixe 1 au NYT). En outre, à poids égal, les branches (ensemble de plusieurs nœuds) sont toujours prioritaires sur les feuilles (correspondant à un seul nœud représentant un caractère précis). De plus, pour comparer deux nœuds (ou deux branches) entre eux, il faut que la fréquence de l'un soit strictement supérieure à celle de l'autre pour qu'il y ait inversion.

Comme pour la variante FGK, l'objectif d'un tel codage est de forcer les nœuds les plus fréquents à remonter vers la racine pour qu'ils obtiennent les codes binaires les plus courts, les échanges se font pour améliorer les positions des nœuds les plus fréquents (plus proche de la racine ou plus à gauche sur le même niveau).

Par exemple, pour chiffrer le message ABBCDBAAAA, on emploie les étapes suivantes :

- Rappel des codages ASCII sur 8 bits : A = 01000001, B = 01000010, C = 01000011 et D = 01000100
- NYT = Ø au début
- A = 01000001 (par la suite NYT= 0, A = 1)
- B = 001000010 (par la suite NYT = 00, B = 01)
- B = 01
- On se rend compte que, $\text{freq}(B)=2 > \text{freq}(A)=1$. Par conséquent, les lettres B et A vont être interverties (par la suite B = 1, A = 01)
- C = 0001000011 (par la suite NYT = 000, C = 001)
- D = 00001000100 (par la suite, NYT = 0000, D = 0001)
- On se rend compte que la branche EMB1 contenant NYT et D vérifie $\text{freq}(\text{EMB1}) = 1 \geq \text{freq}(C)=\text{freq}(A)=1$. Par conséquent, comme les branches sont prioritaires sur les feuilles, EMB1 (dont le codage était 000) va inverser de codage avec celui qui a le plus court parmi ceux de A et C (par la suite A = 000 et EMB1 = 01 soit NYT = 010 et D = 011)
- On se rend compte que la branche EMB2 contenant C et A vérifie $\text{freq}(\text{EMB2}) = 2 \geq \text{freq}(A)=1$. Par conséquent, EMB2 (dont le codage est 00) et B vont être interverties (par la suite B = 00, EMB2 = 1 soit A = 10 et C = 11)
- B = 00
- On se rend compte que la lettre B vérifie $\text{freq}(B)=3 > \text{freq}(\text{EMB2})=2$. Par conséquent, B et EMB2 (dont le codage est 1) vont être interverties (par la suite B = 1, EMB2 = 00 soit A = 000 et C = 001)
- A = 000
- On se rend compte que la lettre A vérifie $\text{freq}(A)=2 > \text{freq}(\text{EMB1})=1$. Par conséquent, A et EMB1 (dont le codage est 01) vont être interverties (par la suite A = 01, EMB1 = 000 soit NYT = 0000 et D = 0001)
- A = 01
- On se rend compte que la lettre A vérifie $\text{freq}(A)=3 > \text{freq}(\text{EMB2})=2$. Par conséquent, A et EMB2 vont inverser de codage (par la suite A = 00, EMB2 = 01 soit C = 011, EMB1 = 010, et ensuite D = 0101, NYT = 0100)
- A = 00
- On se rend compte que $\text{freq}(A)=4 > \text{freq}(B)=3$. Par conséquent, les lettres A et B vont être interverties (par la suite A = 1, B = 00)
- A = 1

Par conséquent, le message chiffré final sera donc :

01000001/001000010/01/0001000011/00001000100/00/000/01/00/1 soit
01000001001000010010001000011000010001000000001001

V.6 – Comparaison des codages adaptatifs FGK et Vitter

On va à présent étudier la transmission du message ABBCD par codage adaptatif, en utilisant la convention selon laquelle la lettre part à gauche (bit=0), comme dans la convention canonique du codage semi-adaptatif. De plus, pour cette variante, on initialisera

systématiquement le NYT = 0 et on mettra toujours la lettre à gauche (ajouter le suffixe 0 au NYT, sans utiliser les codages ASCII pour les nouveaux caractères), et le nouveau NYT à droite (ajouter le suffixe 1 au NYT).

- Au début, comme aucun caractère n'a été rencontré, on a seulement NYT qui vaut 0
- Lorsqu'on rencontre A, on crée A = 00 (fréquence = 1) et NYT = 01
- Lorsqu'on rencontre B, on garde A = 00 (fréquence = 1) mais on crée B = 010 (fréquence = 1) et NYT = 011
- Lorsqu'on rencontre B, on passe à fréquence = 2 pour B, qui est supérieur à fréquence = 1 pour A. On inverse donc A et B, pour obtenir : B = 00 (fréquence = 2), A = 010 (fréquence = 1) et NYT = 011
- Lorsqu'on rencontre C, on garde B = 00 (fréquence = 2), A = 010 (fréquence = 1) et on crée C = 0110 (fréquence = 1) et NYT = 0111
- Lorsqu'on rencontre D, cela permet de mettre en valeur les différences entre les algorithmes FGK et Vitter.

Pour FGK, on obtient B = 00 (fréquence = 2), A = 010 (fréquence = 1), C = 0110 (fréquence = 1), D = 01110 (fréquence = 1) et NYT = 01111. Néanmoins, la fréquence du nœud 011 (comprenant C de fréquence 1 et D de fréquence 1) passe à 2, ce qui est supérieur à fréquence = 1 pour A. On inverse donc le nœud et A pour avoir A = 011 et le nœud à 010 qui donne : C = 0100 (fréquence = 1), D = 01010 (fréquence = 1) et NYT = 01011. Puis on réalise que la fréquence du nœud 01 (comprenant A, C et D) passe à 3, ce qui est supérieur à fréquence = 2 pour B. On inverse donc le nœud et B pour avoir B = 01 et le nœud à 00 qui donne : A = 001, C = 0000, D = 00010 et NYT = 00011.

Pour Vitter, on obtient B = 00 (fréquence = 2), A = 010 (fréquence = 1), C = 0110 (fréquence = 1), D = 01110 (fréquence = 1) et NYT = 01111. Néanmoins, la fréquence du nœud 011 (comprenant C de fréquence 1 et D de fréquence 1) passe à 2, donc on va pouvoir créer une branche parallèle à B (branche de code 1), et faire glisser A vers le haut. Par conséquent, on garde B = 00 (fréquence = 2), mais on bénéficie d'un glissement pour obtenir A = 01 (fréquence = 1), une nouvelle branche avec C = 10 (fréquence = 1), D = 110 (fréquence = 1) et NYT = 111.

Pour FGK, on observe bien que la structure de l'arbre n'est pas du tout optimale car, si les caractères les plus fréquents montent naturellement vers le haut de l'arbre, cela se fait au détriment des caractères les moins fréquents qui sombrent dans de longs chiffres. Par exemple, dans notre cas, les plus longs font 5 bits.

A contrario, pour Vitter on conserve bien une structure optimale car aucun code ne dépasse 3 bits.

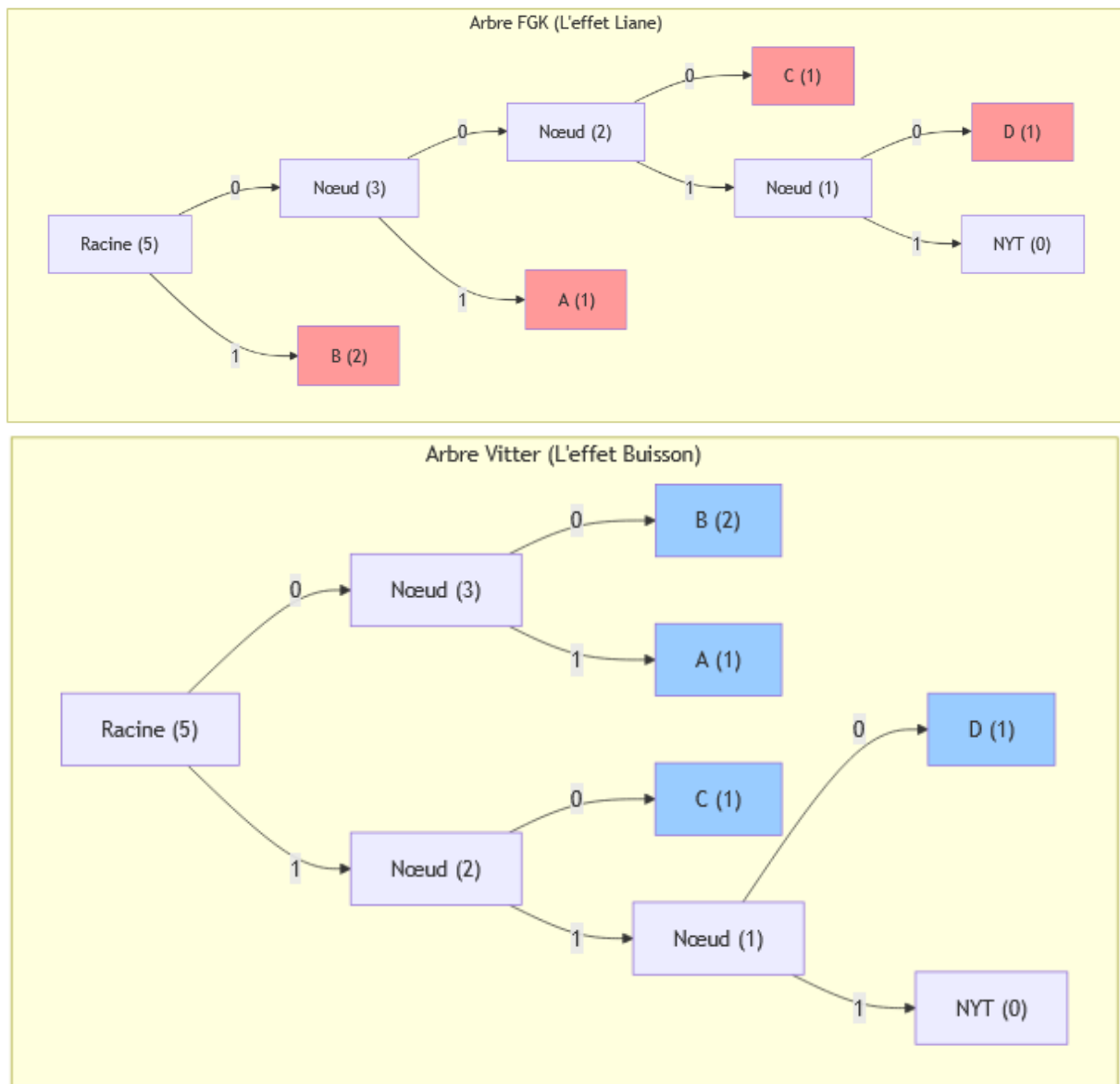


Figure 5 - Comparaison des arbres des algorithmes FGK et Vitter (source : jaudi)

VI – Propriétés mathématiques du codage Huffman

De la définition du codage de Huffman donnée précédemment, on peut en déduire un certain nombre de propriétés intéressantes sur cette méthode de compression, qui aident à comprendre plus en profondeur son fonctionnement logique et sa puissance.

Propriété 1 :

Soient deux caractères A et B, et leurs codes Huffman respectifs $\text{huff}(A)$ et $\text{huff}(B)$. Alors, le fait que le codage Huffman soit un code préfixe implique que, quels que soient A et B, $\text{huff}(A)$ ne correspond pas au début de $\text{huff}(B)$ et $\text{huff}(B)$ ne correspond pas au début de $\text{huff}(A)$.

Propriété 2 :

Soient deux textes $T(1)$ et $T(2)$, correspondant au chiffrement d'un même texte clair $T(0)$ mais par deux dictionnaires de Huffman distincts $D(1)$ et $D(2)$. Si les deux dictionnaires $D(1)$ et $D(2)$ sont équivalents, c'est-à-dire que, pour chaque caractère A , ses codages dans $D(1)$ et $D(2)$ ont la même longueur, alors le texte $T(1)$ correspond à une substitution monoalphabétique du texte $T(2)$.

Propriété 3 :

La fréquence f_0 des caractères dans les branches les plus éloignées de la racine est inférieure à toutes les autres fréquences f_i des branches plus proches de la racine. On en déduit que : plus les feuilles (ou les nœuds) sont proches de la racine, plus leur fréquence est élevée et, de manière analogue, plus les feuilles (ou les nœuds) sont éloignées de la racine, plus leur fréquence est basse.

Propriété 4 :

Si le dictionnaire est optimal pour la chaîne de caractères donnée en entrée, alors tous les paquets d'un même niveau sont compris entre une fréquence f_0 et son double $2 \times f_0$.

Propriété 5 :

Pour le codage de Huffman semi-adaptatif optimal, la longueur idéale du codage d'un caractère correspond au logarithme en base deux de sa fréquence $-\log_2(f_0)$, qui correspond à son entropie de Shannon. La longueur réelle du codage essaie de se rapprocher au maximum de cette longueur idéale, notamment lorsque tous les caractères sont représentés.

Propriété 6 :

Pour le codage de Huffman semi-adaptatif optimal, le cas le moins optimal arrive lorsque toutes les fréquences suivent la suite de Fibonacci (vérifiant $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $\forall n \geq 2$, $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$). Pour un caractère A de fréquence f_0 , cela implique donc l'encadrement suivant pour la longueur $L(A)$ de son chiffré : $1 \leq L(A) \leq -\log_\phi(f_0)$ (avec ϕ le nombre d'or).

Propriété 7 :

Soient deux caractères A et B . Si la fréquence du caractère A est 2^N fois plus grande que celle du caractère B , avec $N = \sup(n)$ tels que $\text{freq}(A) \geq 2^n \times \text{freq}(B)$ et que chaque fusion successive impliquant B reste inférieure à la fréquence de A , alors on en déduit que le caractère B possède un chiffré au moins N bits plus long que le caractère A .

Propriété 8 :

Dans la plupart des cas (ceux pour lesquels l'arbre est complet) pour le codage de Huffman semi-adaptatif (sauf en cas d'une distribution asymétrique comme celle de Fibonacci), si la fréquence f_0 d'un caractère A vérifie l'encadrement $2^n \leq 1/f_0 \leq 2^{n+1}$, alors le caractère A aura un chiffré de longueur n ou $n+1$ bits.

VII – Analyse de l’outil du site Dcode

VII.1 – Fonctionnement de l’outil

A présent, nous allons analyser un peu plus en détail l’outil « Codage de Huffman » du site Dcode.

Tout d’abord, Dcode implémente seulement la version semi-adaptative du codage de Huffman. En outre, il n’utilise pas du tout la convention du codage de Huffman canonique (et par conséquent, cet outil n’est pas adapté si vous devez décrypter des énigmes utilisant la convention canonique du codage).

En effet, quand plusieurs nœuds ont la même fréquence : le premier nœud rencontré (index le plus petit) avec le poids minimal devient enfant gauche, le deuxième nœud rencontré avec le même poids devient enfant droit. C’est donc l’ordre d’insertion initial (l’ordre des caractères) qui détermine quelle lettre sera à gauche ou à droite, donc qui aura un code commençant par 0 ou par 1.

Cet outil utilise le même chiffrement que celui décrit précédemment. Il prend en argument une chaîne de caractères, calcule les fréquences des différents caractères dans la chaîne fournie, et construit ensuite l’arbre selon la procédure expliquée ci-dessus.

VII.2 – Premier exemple : entrée ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ

Par exemple, pour l’entrée ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ, toutes les fréquences des caractères sont identiques et égales à $1/26$. Par conséquent comme $2^4 \leq 26 \leq 2^5$ et que toutes les fréquences sont égales, un certain nombre de lettres va être représenté sur 4 bits, et le reste sur 5 bits. En effet, comme la fréquence des lettres est égale, l’algorithme cherche juste à minimiser la somme des longueurs des bits (il s’agit d’un cas très particulier du codage de Huffman).

L’algorithme de Dcode va à présent regrouper les nœuds les moins fréquents pour construire l’arbre. Sa convention est ici de commencer par le début de la chaîne. Il regroupe A et B sous le même nœud (paquet 1), puis C et D (paquet 2), ... jusqu’à regrouper S et T (paquet 10). A présent, il dispose de 10 paquets de deux lettres (de fréquence $2/26$) et de 6 paquets d’une lettre (de fréquence $1/26$), soit un total de 16 paquets. On vérifie alors que tous les paquets d’un même niveau sont compris entre une fréquence f_0 et son double $2 \times f_0$, ce qui correspond au fait que le dictionnaire est optimal pour la chaîne de caractères donnée en entrée. Tous les paquets sont représentés sur 4 bits, et les lettres uniques seront donc codées sur 4 bits, tandis que les lettres doubles auront 4 bits + 1 bit de suffixe (0 ou 1) soit 5 bits au total.

On peut se convaincre de la véracité de ce raisonnement en inversant deux lettres dans cet alphabet (par exemple RBCDEFGHIJKLMNOPQASTUVWXYZ inverse juste les rôles et codages de R et de A)

VII.3 – Deuxième exemple : entrée

AABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ

Pour l'entrée AABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ, on a 25 lettres de fréquence $1/27$ et une lettre (le A) de fréquence $2/27$.

De manière analogue à précédemment, l'algorithme regroupe les plus basses fréquences (en commençant arbitrairement par le début de l'alphabet). Il regroupe B et C sous le même nœud (paquet 1), puis D et E (paquet 2), ... jusqu'à regrouper T et U (paquet 10). A présent, il dispose de 10 paquets de deux lettres (de fréquence $2/27$) et de 6 paquets comprenant des lettres uniques (5 de fréquence $1/27$ et le A de fréquence $2/27$), soit un total de 16 paquets. On vérifie alors que tous les paquets d'un même niveau sont compris entre une fréquence f_0 et son double $2 \times f_0$, ce qui correspond au fait que le dictionnaire est optimal pour la chaîne de caractères donnée en entrée. Tous les paquets sont représentés sur 4 bits, et les lettres uniques seront donc codées sur 4 bits, tandis que les lettres doubles auront 4 bits + 1 bit de suffixe (0 ou 1) soit 5 bits au total.

VII.4 – Troisième exemple : entrée

AAAAAAAAAAAAABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ

Puis, pour l'entrée AAAAAAAAAAAAAABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ, on a 25 lettres de fréquence $1/36$ et une lettre (le A) de fréquence $11/36$.

Comme $2^5 \leq 36 \leq 2^6$, tous les caractères de fréquence $1/36$ seront codés sur 5 ou 6 bits, et, pour A, comme $2^1 \leq 36/11 \leq 2^2$, il sera donc codé sur 2 bits.

De manière analogue à précédemment, l'algorithme regroupe les plus basses fréquences (en commençant arbitrairement par le début de l'alphabet). Il regroupe B et C sous le même nœud (paquet 1), puis le paquet 1 avec D (paquet 2), puis E et F (paquet 3), puis G et H (paquet 4), ... jusqu'à regrouper Y et Z (paquet 12). A présent, on a 12 au même niveau (compris entre f_0 et $2 \times f_0$ comme mentionné précédemment), 11 de fréquence $2/36$ et 1 de fréquence $3/36$ (et $2 \times 2/36$ est inférieur à la fréquence de A, qui ne rentre donc toujours pas dans l'arbre).

On regroupe ces 12 paquets (deux à deux) en 6 paquets de fréquence comprise $4/36$ et $5/36$ (et $2 \times 4/36$ est inférieur à la fréquence de A, qui ne rentre donc toujours pas dans l'arbre).

On regroupe ces 6 paquets en 3 paquets de fréquence : deux de fréquence $8/36$, un de fréquence $9/36$, auquel on ajoute A de fréquence $11/36$, soit un total de 4 paquets. On vérifie alors que tous les paquets d'un même niveau sont compris entre une fréquence f_0 et son double $2 \times f_0$, ce qui correspond au fait que le dictionnaire est optimal pour la chaîne de caractères donnée en entrée.

Tous les paquets sont représentés sur 2 bits, et A est donc directement codé sur 2 bits, les autres lettres uniques seront donc codées sur $2+3=5$ bits, tandis que les lettres doubles du paquet 1 (B et C) auront $2+3+1=6$ bits au total.

On vérifie bien ici la propriété que $f(A) > 2^4 \times f(B) = 2^4 \times f(C) = \dots = 2^4 \times f(Z)$ se traduit bien par le fait que les caractères les moins fréquents ont un codage de 4 bits plus long que le caractère le plus fréquent (ici A).

VII.5 – Quatrième exemple : entrée

EASINTRLUODCMPVGFQHBXJYZKW

L'entrée EASINTRLUODCMPVGFQHBXJYZKW (classée par fréquences de langue française) se ramène simplement à une permutation de l'alphabet du cas 1 (avec X, J, Y, Z, K et W représentés par 4 bits et tout le reste des lettres représentées par 5 bits).

Bibliographie et remerciements

Pour ceux parmi vous qui sont désireux d'approfondir ce système, voici certains des nombreux articles que j'ai consultés (en avril 2026) pour écrire ce cours de cryptographie :

Ressources en français :

https://fr.wikipedia.org/wiki/David_Albert_Huffman

https://fr.wikipedia.org/wiki/Codage_de_Huffman

<https://liora.io/codage-de-huffman-tout-savoir>

<https://www.dcode.fr/codage-huffman-compression>

http://obligement.free.fr/articles/algorithmes_compression_donnees_huffman.php

<https://www1.ucsc.edu/currents/99-00/10-11/huffman.html>

Ressources en anglais :

https://compression.ru/download/articles/huff/huffman_1952_minimum-redundancy-codes.pdf

https://en.wikipedia.org/wiki/David_A._Huffman

https://en.wikipedia.org/wiki/Huffman_coding

<https://www.dcode.fr/huffman-tree-compression>

<https://www.ittc.ku.edu/~jsv/Papers/Vit87.jacmACMversion.pdf>

<https://www2.cs.duke.edu/csed/curious/compression/adaptivehuff.html#tree>

http://paper.iicsns.org/07_book/200901/20090145.pdf

<https://sites.google.com/view/datacompressionguide/dynamic-prefix-free-coding/algorithm-vitter>

De plus, je tiens à remercier Jericho, car j'ai découvert le codage Huffman dans une de ses créations cryptographiques, ce qui m'a ensuite motivé à faire des recherches approfondies sur ce chiffrement.